代数幾何学シンポジウム記録
2009年度 pp.97-110

ファイバー曲面の局所符号数とその応用, II (Local signature of fibered surfaces and its applications, II)

足利 正 (Tadashi Ashikaga) *

This report is mainly based on some results of the joint work with Ken-Ichi Yoshikawa [7] and our work [2], and we add something in a little about them. This is a continuation of [3]. Please allow the author to write in Japanese. For the related report of the author written in English, please see [4].

いきなり言い訳になり大変恐縮であるが, 筆者は表題の内容について約 2 ヶ月前にも報告 [3] を執筆する必要があった。その際, 論文 [7] [2] の基礎概念である符号数因子並びに局所符号不足数については, すでにその中に詳しく解説させていただいた。そのため本稿ではそれを基にして, 展開部のある部分に焦点をしぼり, [7] [2] では充分説明できなかった点を補足したく思う。特に [7] p.21 で述べた Horikawa 指数と局所符号数との関係に端を発したある予想について, その背景説明を行うのが眼目である。このように [3] の続編の形で解説する方式はやや異例に属するかもしれないが, どうかお許しいただきたい。

研究の動機については [3] の序論で詳細したので, 早速本論に入りたい。記号については重複になっても再記している箇所もあるものの, 原則として [3] のそれをそのまま踏襲している。

1 モジュライ一般なファイバー曲面の局所符号数

ファイバー曲面 $f\colon S \to B$ とは, f がコンパクト非特異複素曲面 S からリーマン面 B への相対極小な固有全射正則写像である時をいう。ファイバー曲面の種数とは, f の一般ファイバーの種数のことを意味する。写像 f は Deligne-Mumford の意味で非安定であるものも許容しているが, B が 1 次元であるという特殊性から, f の臨界値の補集合 $B \setminus \Sigma_f$

* 東北学院大学工学部 (Faculty of Engineering, Tohoku-Gakuin University)

から 非特異曲線のモジュライ空間 $\mathcal{M}_g$ への誘導写像（モジュライ写像）は B 全体から Deligne-Mumford コンパクト化への写像に正則拡張される。これを $\mu_f\colon B \to \overline{\mathcal{M}}_g$ と記す。

モジュライ空間 $\mathcal{M}_g$ 上の, 最大ゴナリティを持たない曲線の 同型類の集合を $\mathcal{D}_{\mathrm{HM}}$ とする。またペトリ条件を乱す次数 $k+1$ ($k=[g/2]$) のペンシルを持つ曲線の同型類の集合を E^1_{k+1} とする。([3] §2.3)

我々はファイバー曲面の各ファイバーの無限小近傍を考える。今 $f_{\mathrm{loc}}\colon (S,S_0) \to (\Delta,0)$ を, 算術種数 g の曲線 S_0 の相対極小な 1 パラメータ変形族の芽であって, その全空間 S は非特異であるとする。これを簡単のため (f,S_0) $(=(f_{\mathrm{loc}},S_0))$ と書き, ファイバー芽と呼ぶ。同値類であるファイバー芽をしばしばその代表元と同一視する。

Definition 1.1 $\mathcal{A}$ を $\mathcal{M}_g$ の部分集合とする。

(1) 種数 g のファイバー芽 $f\colon (S,S_0) \to (\Delta,0)$ が $\mathcal{A}$ 一般であるとは, 誘導写像が $\mu_f(\Delta \setminus \{0\}) \subset \mathcal{A}$ を満たす時を言う。種数 g のファイバー曲面 $f\colon S \to B$ が $\mathcal{A}$ 一般であるとは, 任意の $b \in B$ についてファイバー芽 $f\colon (S,S_b) \to (B,b)$ が $\mathcal{A}$ 一般である時を言う。すべての $\mathcal{A}$ 一般な種数 g のファイバー芽を $\mathbf{Germ}(\mathcal{A})$ と記す。

(2) $\mathcal{A} = \mathcal{M}_g \setminus \mathrm{Supp}\,\mathcal{D}_{\mathrm{HM}}$ の時の $\mathcal{A}$ 一般なファイバー曲面を *Harris-Mumford* 一般 *(HM* 一般*)* と呼ぶ。同様に $\mathcal{A} = \mathcal{M}_g \setminus \mathrm{Supp}\ E^1_{k+1}$ である時には *Eisenbud-Harris* 一般 *(EH* 一般*)* と呼ぶ。

我々が問題とする局所符号数の概念を正確に定式化すれば次のようになる。

Definition 1.2 $\mathcal{A}$ を $\mathcal{M}_g$ の部分集合とする。関数 $\sigma_{\mathcal{A}}\colon \mathbf{Germ}(\mathcal{A}) \to \mathbf{Q}$ は次の二つの条件を満たす時 $\mathcal{A}$ に関する局所符号数と呼ばれる*:*

(1) もし $[S_0] \in \mathcal{A}$ であり且つ $f\colon (S,S_0) \to (\Delta,0)$ が $\mathcal{A}$ 一般なファイバー芽であれば*,*

$$\sigma_{\mathcal{A}}(f,S_0) = 0.$$

(2) すべての $\mathcal{A}$ 一般なファイバー曲面 $f\colon S \to B$ の符号数 $\mathrm{Sign}(S)$ は有限和による次の表示を持つ*;*

$$\mathrm{Sign}(S) = \sum_{b \in B} \sigma_{\mathcal{A}}(f,S_b).$$

さて $\mathcal{D}_{\mathrm{sign}}$ を $\overline{\mathcal{M}}_g$ 上の符号数因子 ([3] §2.2) とする。つまり λ を $\overline{\mathcal{M}}_g$ 上の Hodge 束とし δ を境界因子とする時, 定義より $\mathcal{D}_{\mathrm{sign}}$ は $4\lambda - \delta$ に有理線形同値である。以下

$\mathcal{A}=\mathcal{M}_g\setminus\mathrm{Supp}(\mathcal{D}_{\mathrm{sign}})$ の時を考える。種数 g の $\mathcal{A}$ 一般なファイバー芽 $f\colon(S,S_0)\to(\varDelta,0)$ に対して $f\colon(S',S_0')\to(\varDelta',0)$ をその最小半安定還元とする。つまりこの還元は, 被覆次数 N_0 がこの芽の局所モノドロミー写像の最小擬周期に一致する底変換 $\varDelta'\to\varDelta$ から生じているものとする。これに対する誘導写像を $\mu_{f'}:\varDelta'\to\overline{\mathcal{M}}_g$ と書く。　$'$ に引き戻された因子 $\mu_{f'}^*\mathcal{D}_{\mathrm{sign}}$ の原点における重複度を $\mathrm{mult}_{[0]}\,[\mu_{f'}^*\mathcal{D}_{\mathrm{sign}}]$ と書く。

念のためこの (Picard 関手としての）重複度の意味を復習しておくと, S_0' の倉西空間 $\mathrm{Ext}^1(\Omega^1_{S_0'},\mathcal{O}_{S_0'})\simeq\mathbf{C}^{3g-3}$ に $\mathcal{D}_{\mathrm{sign}}$ と $\mu_{f'}^*(\ \ ')$ を引き上げて, 通常の因子と曲線の原点における局所交点数を測ったものである。(cf. [10] p.143) 従って特に非負整数値である。

芽 (f,S_0) の正規極小モデルを $(\tilde{f},\tilde{S}_0)$ とし, このモデルに対して定義されていた局所符号不足数 $\mathrm{Lsd}(\tilde{f},\tilde{S}_0)$ ([3] §3.2）を用いて

$$\widehat{\mathrm{Lsd}}(f,S_0)=\mathrm{Lsd}(\tilde{f},\tilde{S}_0)+\#\mathrm{Bd}_{NR}. \tag{1.2.1}$$

と置く。ここに $\#\mathrm{Bd}_{NR}$ は正規極小モデルから今考えている相対極小モデルを得るのに必要な (-1)-曲線の blow down の回数を示す。

Theorem 1.3 ([7])　次の定義は $\mathcal{A}=\mathcal{M}_g\setminus\mathrm{Supp}(\mathcal{D}_{\mathrm{sign}})$ に関する局所符号数を与える。

$$\sigma_{\mathcal{A}}(f,S_0):=\frac{1}{N_0}\mathrm{mult}_{[0]}\,[\mu_{f'}^*\mathcal{D}_{\mathrm{sign}}]+\widehat{\mathrm{Lsd}}(f,S_0).$$

[3] §2.3 で説明した Harris-Mumford 型符号数因子 $\mathcal{D}_{\mathrm{signHM}}$ 並びに Eisenbud-Harris 型符号数因子 $\mathcal{D}_{\mathrm{signEH}}$ の具体的表示を, 上の定理に適応すれば次の系を得る。

Corollary 1.4　*$f\colon S\to B$ を奇数種数 $g=2k-1$ $(k\geq 2)$ の HM 一般なファイバー曲面とする。ファイバー芽 (f,S_b) $(b\in B)$ に対して*

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{HM}}(f,S_b)&=\frac{1}{N_b}\cdot\mathrm{mult}_{b'}[\mu_{f'}^*\mathcal{D}_{\mathrm{signHM}}]+\widehat{\mathrm{Lsd}}(f,S_b)\\&=\frac{1}{N_b}\left\{\frac{2\cdot k!(k-2)!}{3(k+1)(2k-4)!}\,\mathrm{mult}_{b'}[\mu_{f'}^*\overline{\mathcal{D}}_{\mathrm{HM}}]-\frac{k+3}{3(k+1)}\,\mathrm{mult}_{b'}[\mu_{f'}^*\delta_0]\right.\\&\qquad\left.+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{2i(2k-1-i)-(k+1)}{k+1}\,\mathrm{mult}_{b'}[\mu_{f'}^*\delta_i]\right\}+\widehat{\mathrm{Lsd}}(f,S_b)\end{aligned}$$

とおく。ここに N_b は (f,S_b) の局所モノドロミー写像の最小擬周期を表し, また b' はその最小半安定還元されたファイバーの臨界値である。この時

$$\mathrm{Sign}(S)=\sum_{b\in B}\sigma_{\mathrm{HM}}(f,S_b).$$

Corollary 1.5 $f\colon S \to B$ を偶数種数 $g = 2k$ $(k \geq 2)$ の *EH* 一般なファイバー曲面とする。ファイバー芽 (f, S_b) $(b \in B)$ に対して

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{EH}}(f, S_b) &= \frac{1}{N_b} \cdot \mathrm{mult}_{b'}[\mu_{f'}^{*}\mathcal{D}_{\mathrm{signEH}}] + \widehat{\mathrm{L}}\mathrm{sd}(f, S_b)\\ &= \frac{1}{N_b}\left\{\frac{1}{a}\mathrm{mult}_{b'}[\mu_{f'}^{*}\overline{E_{k+1}^{1}}] + \sum_{i=0}^{k}\left(\frac{b_i}{a} - 1\right)\mathrm{mult}_{b'}[\mu_{f'}^{*}\delta_i]\right\} + \widehat{\mathrm{L}}\mathrm{sd}(f, S_b)\end{aligned}$$

とおく。ただし上の係数に現われる有理数 a, b_i $(0 \leq i \leq k)$ は [3] §2.3 で定義されたものとする。この時

$$\mathrm{Sign}(S) = \sum_{b \in B} \sigma_{\mathrm{HM}}(f, S_b).$$

この 2 つの系をさらにそれぞれ最小種数の場合に特殊化して述べれば次のようになる。まず $g = 3$ の時であるが, この時は f が HM 一般ということは, 非超楕円的ファイブレーション（つまり一般ファイバーが非超楕円的）ということに他ならない。そして Harris-Mumford 跡とは超楕円跡のことである。よって:

Corollary 1.6 $f\colon S \to B$ を非超楕円的な種数 *3* のファイバー曲面とする。この時

$$\begin{aligned}\mathrm{Sign}(S) = \sum_{b \in B} \sigma_{\mathrm{HM}}(f, S_b) = \sum_{b \in B}\Bigg\{\frac{1}{N_b}\Bigg(&\frac{4}{9}\,\mathrm{mult}_{b'}[\mu_{f'}^{*}\overline{\mathcal{D}}_{\mathrm{hyper}}]\\ &-\frac{5}{9}\,\mathrm{mult}_{b'}[\mu_{f'}^{*}\delta_0] + \frac{1}{3}\,\mathrm{mult}_{b'}[\mu_{f'}^{*}\delta_1]\Bigg) + \widehat{\mathrm{L}}\mathrm{sd}(f, S_b)\Bigg\}\end{aligned}$$

となる。ここに $\overline{\mathcal{D}}_{\mathrm{hyper}}$ は $\overline{\mathcal{M}}_3$ 内の超楕円跡の閉包で定義される因子である。

これから, 例えば分離的な種数 3 の Lefschetz 曲線の局所符号数が 1/3 であることなどがすぐに従う。なお最近, 久野雄介氏 [18] はマイヤー関数の方法を発展させつつ別の観点からこれらの結果を得ている。

次に $g = 4$ の場合を考えよう。種数 4 のリーマン面 C の同型類が $E_3^1 \subset \mathcal{M}_4$ に属するのは, C が超楕円的であるか, もしくは非超楕円的且つ g_3^1 をただ一つ持つ, つまりその標準像が階数 3 の 2 次曲面（2 次曲線上の cone）に含まれることである。そうでない一般の種数 4 のリーマン面の標準像は階数 4 の 2 次曲面（非特異 2 次曲面）に含まれる。従って EH 一般な種数 4 のファイバー曲面は, 種数 4 階数 4 のファイバー曲面と呼ばれることもある。

なお $E_3^1 \subset \mathcal{M}_4$ は偶テータ定数が消える locus とも一致することを注意しておく。つまり偶テータ定数 $\prod_{(a,b)\,\mathrm{even}} \theta_{a,b}$ は $\overline{\mathcal{M}}_4$ 上のある直線束の正則切断と見ることができて, この切断の定義する因子は $\overline{E}_3^1$ に一致する。

Corollary 1.7 $f\colon S \to B$ を種数 4 階数 4 のファイバー曲面とする。この時

$$\mathrm{Sign}(S) = \sum_{b\in B} \sigma_{\mathrm{HM}}(f, S_b) = \sum_{b\in B} \left\{ \frac{1}{N_b} \left(\frac{2}{17}\mathrm{mult}_{b'}[\mu_{f'}^{*}\overline{E}_3^1] - \frac{9}{17}\mathrm{mult}_{b'}[\mu_{f'}^{*}\delta_0] \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{11}{17}\mathrm{mult}_{b'}[\mu_{f'}^{*}\delta_1] + \frac{19}{17}\mathrm{mult}_{b'}[\mu_{f'}^{*}\delta_2] \right) + \widehat{\mathrm{L}}\mathrm{sd}(f, S_b) \right\}.$$

吉川謙一氏 [25] は, 安定ファイバー芽という条件下で, 偶テータ定数を用いて局所符号数を定義している。種数 4 以下の場合にそれが上の系 1.6, 1.7 で得られる値と一致するのは, 本質的にこの場合に限っては Harris-Mumford 及び Eisenbud-Harris 型符号数因子の台と偶テータのそれとの一致性による。しかし一般種数ではこれは成り立たない。実際, 例えば非分離原始的な Lefschetz ファイバー芽に対しては, [25] の局所符号数値は $-\dfrac{2^{g-1}+1}{2^g+1}$ であるのに対して, 系 1.6, 1.7 のそれは分子分母が共に g について一次式となっている。

この事実は, 局所符号数なるものは, 大域的状況では足し上げると同じ符号数になるとは言っても, ファイバー芽の不変量としては異なるものが複数個ありえるということを示している[1]。

種数 4 階数 4 のファイバー芽にもどって, 今野一宏氏 [17] は相対標準環の立場から局所符号数を定義した。また久野雄介氏 [19] は, ごく最近マイヤー関数の方法による局所符号数の概念をこのクラスのファイバー芽に対しても拡張した。これらの formulation はお互いに全く異なる見地から得られているものの, 系 1.7 のものと結果としては同じ局所符号数値を与えている。

なお, 種数 4 階数 4 のファイバー曲面の構造を持つ一般型代数曲面の最近の大域的研究として, 高橋知邦氏 [23] によるものがある。

2 Horikawa 指数についての予想

種数 g のファイバー曲面 $f\colon S \to B$ の相対標準因子の自己交点数と行列式束の次数の比で定義されるスロープ $\nu_f = K_{S/B}^2/\lambda(f)$ について知られた, 一般的な Xiao 不等式

$$\frac{4(g-1)}{g} \le \nu_f \le 12$$

は, もし f が特別なクラスに属するファイバー曲面である場合はシャープではない。例えば非超楕円的種数 3 のファイバー曲面では, スロープ下限は（8/3 ではなくて）3 であり, その下限はちょうど標準曲面の存在域の下限である Castelnuovo 直線で与えられる。

[1]吉川氏と共同研究を始めた初期の頃に, 氏はこの事実を強く意識されていて, 筆者は感銘を受けた。

Horikawa 指数とは, 本来のスロープ下限からのファイバー芽の地理的 (geographical) 寄与を捉えようとするものであり, 種数 2 の堀川潁ニ氏の作品 [11] を拡張すべく始められた。2000 年前後までのこの方面の進展については, 今野一宏氏との共著 [6] を参照されたい。正確な概念の定式化は次のとおりである。

Definition 2.1 $\mathcal{A}$ を $\mathcal{M}_g$ の部分集合とし, $\nu \in \mathbf{Q}$ を $4-4/g \le \nu \le 12$ を満たす定数とする。非負の有理数値をとる関数 $\mathrm{Ind}_{\mathcal{A}}\colon \mathbf{Germ}(\mathcal{A}) \to \mathbf{Q}_{\ge 0}$ がペア $(\mathcal{A}, \nu)$ に関する *Horikawa* 指数であるとは, 次の条件が満たされる時を言う。

(i) もし $[S_0] \in \mathcal{A}$ であり且つ (f, S_0) が $\mathcal{A}$ 一般な種数 g のファイバー芽ならば

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{A}}(f, S_0) = 0.$$

(ii) すべての $\mathcal{A}$ 一般な種数 g のファイバー曲面 $f\colon S \to B$ について, 次の等式（スロープ等式と呼ぶ）が成り立つ:

$$K_{S/B}^2 = \nu\,\lambda(f) + \sum_{b \in B} \mathrm{Ind}_{\mathcal{A}}(f, S_b).$$

もしも $(\mathcal{A}, \nu)$ に関する Horikawa 指数 $\mathrm{Ind}_{\mathcal{A}}(\cdot)$ が存在するなら

$$\sigma_{\mathcal{A}}(\cdot) := \frac{4}{12-\nu}\,\mathrm{Ind}_{\mathcal{A}}(\cdot) - \frac{8-\nu}{12-\nu}\,\epsilon(\cdot) \tag{2.1.1}$$

と置くことによって, 容易に $\mathcal{A}$ に関する一つの局所符号数の定式化が得られる。(cf. [6]) ここに $\epsilon\colon \mathbf{Germ}(\mathcal{A}) \to \mathbf{Z}$ は位相的オイラー寄与 $\epsilon(f, S_b) = \chi_{\mathrm{top}}(S_b) - (2-2g)$ を意味する。

今度は逆に, 局所符号数 $\sigma_{\mathcal{A}}(\cdot)$ の定式化が見つかったとして, これから Horikawa 指数の定式化を得ることを考えてみよう。そのためには $\mathcal{A}$ に関する定義 2.1 中の ν (スロープ下限と呼ばれる）をまず見つける必要がある。これは中心ファイバー S_0 が $\mathcal{A}$ には属さないファイバー芽 (f, S_0) の中で “最小の Horikawa 指数を持つと期待される芽” について, $\mathrm{Ind}_{\mathcal{A}}(f, S_0) = 0$ となるような数 ν を見つける問題とも解釈される。

種数 2 の場合, 堀川氏の作品 [11] では $\mathrm{Ind}_{\mathcal{A}}(f, S_0) = 0$ となるような (f, S_0) には “0 型ファイバー” なる名称が与えられているが, この 0 型種数 2 退化ファイバー芽は, 必ず有限個の非分離的 Lefschetz ファイバー芽（ノード 1 個の既約安定曲線の芽）に Horikawa 指数の和を保存しつつ分裂変形する ([1] I, Cor.4.12)。逆に, 非分離的 Lefschetz ファイバー芽の Horikawa 指数が 0 となることを要請して slope 下限 ν を定めてみると, 正しい

答 $\nu = 2$ を得る。石坂瑞穂氏は, 大胆にもこの考察が任意の $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_g$ の時にも有効であろうという予想を, ある研究集会[2]の席上で述べた。

Conjecture A（石坂） $\mathcal{A}$ に関する Horikawa 指数 $\mathrm{Ind}_{\mathcal{A}}$ が正しく定式化されたなら, 非分離的 Lefschetz ファイバー芽 (f, S_0) については必ず $\mathrm{Ind}_{\mathcal{A}}(f, S_0) = 0$ となる。そしてこの性質が $\mathcal{A}$ に関するスロープ下限 ν を確定する。

こうして ν が決まれば (2.1.1) を $\mathrm{Ind}_{\mathcal{A}}(\cdot)$ について解いて

(2.1.2)
$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{A}}(\cdot) := \frac{12-\nu}{4}\sigma(\cdot) + \frac{8-\nu}{4}\epsilon(\cdot)$$

と置けば, これがこの場合の Horikarwa 指数を与えると予想される。

このことを奇数種数 $g = 2k-1$ の Harris-Mumford 一般なファイバー曲面, つまり $\mathcal{A} = \mathcal{M}_g \setminus \mathrm{Supp}(\mathcal{D}_{\mathrm{HM}})$ の時に試みてみよう。非分離的 Lefschetz ファイバー芽 (f, S_0) については $\epsilon(f, S_0) = 1$ は当然であるが, さらに $N = 1$, $\hat{\mathrm{L}}\mathrm{sd}((f, S_0) = 0$ であるから Corollary 1.4 より $\sigma_{HM}(f, S_0) = -(k+3)/(3k+3)$ である。よって (2.1.2) より $\mathrm{Ind}(f, S_0) = (-k\nu + 6k - 6)/(6k+6)$ を得る。従って $\mathrm{Ind}(f, S_0) = 0$ という要請は

(2.1.3)
$$\nu = \frac{6(k-1)}{k} = \frac{6(g-1)}{g+1}$$

を意味する。式 (2.1.3), (2.1.2) を Corollary 1.4 の結果とあわせると次の予想[3]となる。

Conjecture B（[7] p.21 にある予想の "異型"） 次式は Harris-Mumford 一般な奇数種数の芽 (f, S_0) についての Horikawa 指数を与えるであろう:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}'_{\mathrm{HM}}(f, S_0) = &\frac{1}{N_0}\left\{\frac{(k-1)!(k-2)!}{(2k-4)!}\,\mathrm{multi}_{[0]}[\mu^*_{f'}\overline{\mathcal{D}}_{\mathrm{HM}}] - \frac{k+3}{2k}\mathrm{multi}_{[0]}[\mu^*_{f'}\delta_0]\right.\\ &\left.+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{6i(2k-1-i)-3(k+1)}{2k}\,\mathrm{multi}_{[0]}[\mu^*_{f'}\delta_i]\right\}\\ &+\frac{3(k+1)}{2k}\mathrm{Lsd}(f, S_0) + \frac{k+3}{2k}\epsilon(f, S_0) + \#\mathrm{Bd}_{NR}.\end{aligned}$$

ただし [7] p.21 では, 上記中の Lsd のところを $\widehat{\mathrm{Lsd}}$ とし $\#\mathrm{Bd}_{NR}$ を取り去った形の式を予想しているが, 定義 (1.2.1) から $\#\mathrm{Bd}_{NR}$ を切り出して足した上の式が正しく, こう訂正すべきである。

[2] 上野健爾氏主催の 2006 年 3 月の京阪奈プラザにおける「代数幾何学と複素力学系」研究集会。

[3] 予想 B はもともと予想 A とは独立に考えられたが, 本稿ではこのような説明の仕方をとった。

これがまだ予想に留まっている理由は, 現在その非負性を証明することができないからある。安定曲線の芽については, $N_0 = 1, \mathrm{Lsd} = 0$ である故, 明らかに非負である。しかし非安定な場合は不明である。一般に Lsd は絶対値の小さくない負の数であることが多い。我々が [2] で与えたLsd の明示式は, [3] でも解説したがモノドロミー情報に関する連分数展開で記述され, そのもとは Dedekind 和 である。数論的なデリケートさを有した項と言える。

この予想を “異型” と書いたのは, これから説明する “本型” なるものが存在するからである。一般に種数 $g \geq 4$ のリーマン面 C に対して, その Cli ord 指数が

$$\mathrm{Cli}\ \ (C) = \min\{\deg L - 2\dim|L|,\ \ L \in \mathrm{Pic}(C), h^0(L) > 1, h^1(L) > 1\}$$

で定義され, 不等式 $0 \leq \mathrm{Cli}\ \ (C) \leq (g-1)/2$ が満たされる。今野一宏氏 [16] は, 一般ファイバーの Cli ord 指数が指定された c $(0 \leq c \leq (g-1)/2)$ であるようなファイバー曲面 $f : S \to B$ について, 相対標準環 $\oplus f_*(K_{S/B}^{\ n})$ の Koszul 複体の性質から Horikawa 指数の存在を導いた。これを $\mathrm{Ind}_{\mathcal{K},c}(\cdot)$ と書き, Konno 型 Horikawa 指数と呼ぼう。

特に今問題にするのは, 奇数種数で最大 C ord 指数 $c = (g-1)/2$ の時であり, この場合は $\mathrm{Ind}_{\mathcal{K},c}(\cdot)$ を単に $\mathrm{Ind}_{\mathcal{K}}(\cdot)$ と書こう[4]。$\mathrm{Ind}_{\mathcal{K}}(\cdot)$ について [16] で求められたスロープ下限は $\nu = 6(g-1)/(g+1)$ であり (2.1.3) 式に一致する。また $\mathcal{M}_g$ 内の Harris-Mumford locus は余次元 2 以上を法として最大 Cliford 指数を持つ曲線の locus に一致する。このことから Conjeture B の中に定義された $\mathrm{Ind}'_{HM}(\cdot)$ が, この $\mathrm{Ind}_{\mathcal{K}}(\cdot)$ に等しいかを問う必然性を了解いただけるものと思う。

Conjecture C（[7] p.21 にある予想 “本型”） Harris-Mumford 一般な奇数種数の芽 (f, S_0) について次式が成り立つであろう。

$$\mathrm{Ind}'_{HM}(f, S_0) = \mathrm{Ind}_{\mathcal{K}}(f, S_0).$$

これも一般に未解決である。ただし現在, 最小種数 $g = 3$ の時のみは正しいことが示せる。以下この場合に限って関連する事項と合わせて述べてゆくが, これらは石坂瑞穂氏との議論の中から得られたことである。

まず $g = 3$ の場合は, 上の $\mathrm{Ind}_{\mathcal{K}}(\cdot)$ は Miles Reid 氏 [22] が定義した Horikawa 指数に一致するので $\mathrm{Ind}_{\mathcal{R}}(\cdot)$ と書いておく。なおこんな説明の仕方は歴史的には勿論あべこべで, 種数 3 の時の Reid 氏の方法 (1990) を今野氏 (1999) が一般種数に拡張したというのが歴史的順序である。

[4] この不変量 $\mathrm{Ind}_{\mathcal{K}}(\cdot)$ の記述は [6] §2.3 にもあるので参照されたい。

Proposition 2.2 種数 3 の非超楕円的ファイバー芽, つまり中心ファイバー以外が非超楕円的なファイバー芽 (f, S_0) について

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_{\mathrm{HM}}(f,S_0) = \frac{1}{N_0}\left\{\mathrm{multi}_{[0]}[\mu^*_{f'}\overline{\mathcal{D}}_{\mathrm{Hyper}}] - \frac{5}{4}\mathrm{multi}_{[0]}[\mu^*_{f'}\delta_0] + \frac{3}{4}\,\mathrm{multi}_{[0]}[\mu^*_{f'}\delta_1]\right\} \\ + \frac{9}{4}\mathrm{Lsd}(f,S_0) + \frac{5}{4}\epsilon(f,S_0) + \#\mathrm{Bd}_{NR}\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

は $\mathcal{A} = \mathcal{M}_3 \setminus \mathrm{Supp}\,\mathcal{D}_{Hyper}$ についての Horikawa 指数を与え, かつそれは $\mathrm{Ind}_{\mathcal{R}}(f, S_0)$ に一致する。

種数 3 の非超楕円的ファイバー芽とは匆論平面 4 次曲線族のファイバー芽のことであり, 久野氏 [18] の考察の一部が使える利点がある。式 (2.2.1) は Reid 氏 [22] の言葉[5] を借りれば “modular invariant” による Horikawa 指数の解釈ということになるであろうか？

式 (2.2.1) 中の項の中で $\mathrm{multi}_{[0]}[\mu^*_{f'}\overline{\mathcal{D}}_{\mathrm{Hyper}}]$ 以外の項は, すべて位相モノドロミーから決まる。うち $\mathrm{Lsd}(f, S_0)$ は [3]§2 で解説したとおりだが, N_0 や $\epsilon(f, S_0)$ や $\#\mathrm{Bd}_{NR}$ も当然だし, $\mathrm{multi}_{[0]}[\mu^*_{f'}\delta_0]$, $\mathrm{multi}_{[0]}[\mu^*_{f'}\delta_1]$ についてもそれぞれ非分離的及び分離的消滅サイクルに沿うスクリュー数の立場から容易に解釈できる。

一方, 種数 3 の位相モノドロミーは石坂氏との共著 [5] により分類された。約 1600 種類ほどある。また石坂氏 [13] の考察を用いることにより, その中で非超楕円的ファイバー芽から来るものと超楕円的なものとの区別が可能である。この意味で $\mathrm{multi}_{[0]}[\mu^*_{f'}\overline{\mathcal{D}}_{\mathrm{Hyper}}]$ 以外の項は原理的に計算可能と言える[6]。

この “本来のモジュライ項” とでも呼ぶべき $\mathrm{multi}_{[0]}[\mu^*_{f'}\overline{\mathcal{D}}_{\mathrm{Hyper}}]$ についてであるが, 粗っぽく説明するなら “安定還元ファイバーをモース化（原始ファイバーへの分裂変形）した際に出てくる超楕円的な非特異ファイバーの個数” ということになる。これは位相的観点からは “目に見えない量” にたとえられよう。この値が非常に特別な整数値しかとりえないことは明白である。なぜなら (2.2.1) 式の右辺は一見すればとても整数値にはなりえないような有理数値に見えるが, しかし左辺は Reid 氏の非負整数値

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{R}}(f,S_0) = \mathrm{length\ Coker}\,\{\mathrm{Sym}^2 K_{S/B} \to K_{S/B}^{\ 2}\}_0$$

であるからである。我々は逆にこの性質が $\mathrm{multi}_{[0]}[\mu^*_{f'}\overline{\mathcal{D}}_{\mathrm{Hyper}}]$ の値を確定すると予想したい。

[5][22] には 1990 年時点でその後重要になるであろう 3 つの概念「モース化, 相対標準環, モジュラー不変量」が解説されている。しかし筆者がこの概念（というより問題群）を彼から教わったのはもっと直接的で, 1989 年に京都大学の一室での “個人セミナー”でのことである。その後の筆者の研究方向に多大な影響をもたらした。ごく最近 Reid 氏に会った折, 「やっとモジュラー不変量にも少しだけ手が ···」と言おうとするとそれを制止され, 「匆論そう」と言って笑顔を返された。

[6]種数 3 の局所符号不足数は瀬野尾隼平氏によりパソコンを用いてその具体的値がすべて求められた (2009 年度東北学院大学大学院修士論文として準備中)。

Conjecture D　種数 3 の非超楕円的位相モノドロミー情報が与えられたとする。この時, 値

$$\frac{1}{N_0}\left\{x-\frac{5}{4}\mathrm{multi}_{[0]}[\mu_{f'}^{*}\delta_0]+\frac{3}{4}\,\mathrm{multi}_{[0]}[\mu_{f'}^{*}\delta_1]\right\}+\frac{9}{4}\mathrm{Lsd}(f,S_0)+\frac{5}{4}\epsilon(f,S_0)+\#\mathrm{Bd}_{NR}$$

が非負整数値になるような任意の非負整数値 x に対して, このモノドロミーを与えつつ且つ

$$x=\mathrm{multi}_{[0]}[\mu_{f'}^{*}\overline{\mathcal{D}}_{\mathrm{Hyper}}]$$

となるような種数 3 の非超楕円的ファイバー芽 (f,S_0) が実際存在する。

この予想は, 周期的モノドロミーの場合は石坂氏 [14] により肯定的に解かれているが, 一般には不明である。以下に（周期的ではない）擬周期的モノドロミーの場合で非自明な例を一つ構成しつつ, 予想の意味をもう少し明確にしてみよう。

Example 2.3　非超楕円的な種数 3 の非安定な退化族 $f:S\to\quad=\{t\in\mathbf{C}\mid|t|<\epsilon\}$ であって, その正則拡張された誘導写像 $\mu_f:\quad\to\overline{\mathcal{M}}_3$ による原点の像 $\mu_f(0)$ が 余次元 2 の locus である $\mathrm{Supp}\,(\overline{\mathcal{D}}_{\mathrm{Hyper}})\cup\mathrm{Supp}\,(\delta_1)$ の一般点であるものをとる。この点に対応する安定曲線 C は C_1+C_2 と既約分解され, C_1, C_2 はそれぞれ種数 $1,2$ の非特異曲線であって且つノード $P=C_1\cap C_2$ は C_2 上 Weierstrass 点である。

この条件を満たす f の位相モノドロミー写像 $\Sigma_3\to\Sigma_3$ (Σ_3 は種数 3 のリーマン面）は, ただ一つの非分離単純平曲線のアニュラス $\mathcal{A}$ とその補集合の 2 つの連結成分であるそれぞれ境界付き種数 1, 2 のリーマン面である胴体部 $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2$ への自然な分解 $\Sigma_3=\mathcal{B}_1\cup\mathcal{A}\cup\mathcal{B}_2$ を導く。胴体部の全 valency には [5] Lemma 1.4 (i) (ii) の中で "許容されるもの" に絞られる。この説明はすぐ行うが, 我々はそのようなものの一つとして $\mathcal{B}_2$ の全 valency が

(2.3.1)
$$\frac{9}{10}+\frac{3}{5}+\frac{1}{2}$$

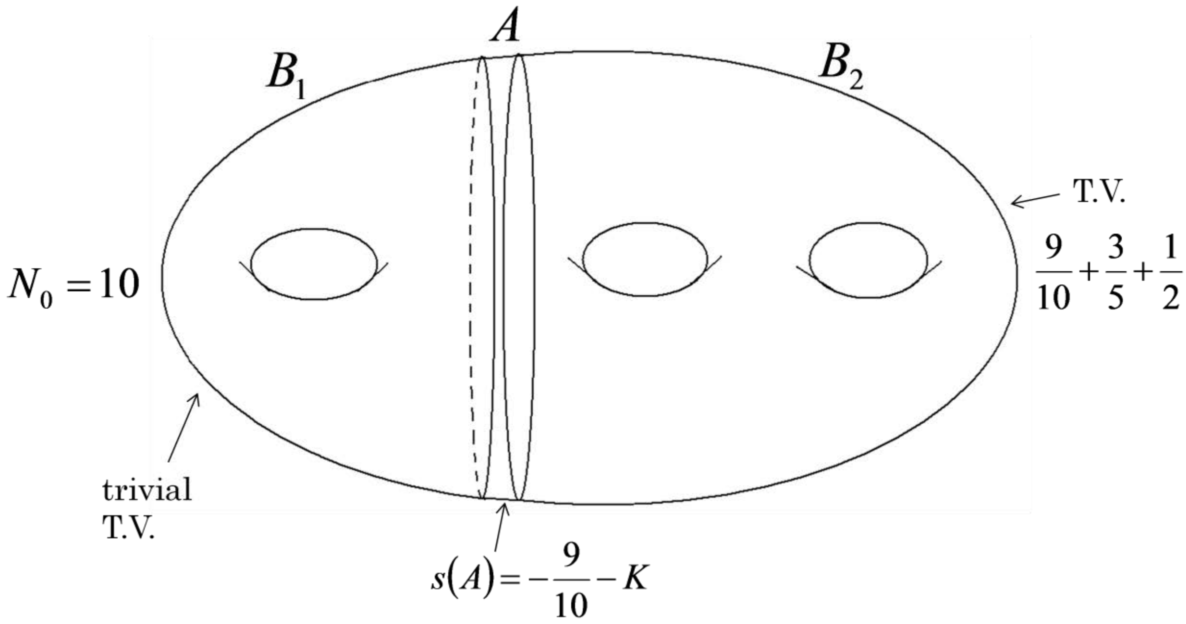
であって且つ $\mathcal{B}_1$ 上の 全 valency は自明であり, $\mathcal{A}$ での screw 数が $\mathbf{s}(\mathcal{A})=-9/10-K$ (K は非負整数) であるものを考える。([Figure 1] 参照) このように位相モノドロミー情報を決めると, 特異ファイバー S_0 の形状は [Figure 2] のようになり, 容易に

$$N_0=10,\quad \mathrm{Lsd}(f,S_0)=-\frac{87}{10},\quad \epsilon(f,S_0)=16+K,$$

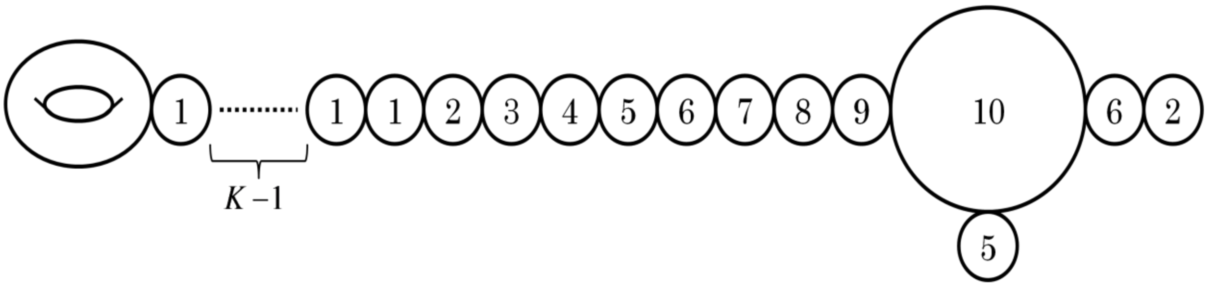
$$\mathrm{multi}_{[0]}[\mu_{f'}^{*}\delta_1]=10K+9,\quad \mathrm{multi}_{[0]}[\mu_{f'}^{*}\delta_0]=0,\quad \#\mathrm{Bd}_{NR}=0$$

を得る。これらの値を (2.2.1) の右辺に代入して左辺の整数性を用いると, ある自然数 $\ell\in\mathbf{N}$ が存在して

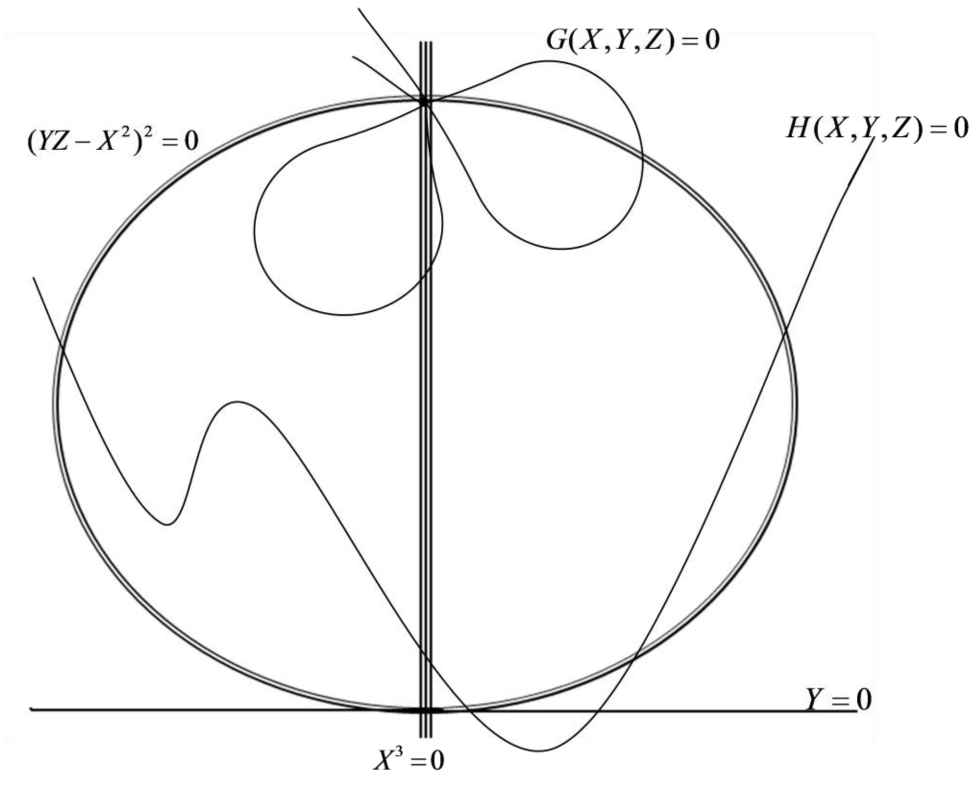
(2.3.2)
$$\mathrm{multi}_{[0]}[\mu_{f'}^{*}\overline{\mathcal{D}}_{\mathrm{Hyper}}]=10\ell-1$$



<Figure 1>



<Figure 2>



<Figure 3>

である必要がある。この下で Horikawa 指数は

$$\mathrm{Ind}(f, S_0) = \ell + 2K + 1$$

となる。

位相モノドロミーのみに注目してこの非安定退化族を構成するには, 例えば高村茂氏 [24] が行ったように[7], まずこの安定曲線 C を中心ファイバーに持つ安定族を構成しておいて, それに位数 10 の巡回群を作用させ, その群による安定族の商空間が $A_{10,9}$ 型, $A_{5,3}$ 型, $A_{2.1}$ 型巡回商特異点を 1 個ずつ持つようにして, それを特異点解消すれば良い。先に "認容される" valency と述べたのは, その巡回群作用が今の場合は C_2 の超楕円的 involution と可換になるという要請のことである。しかしこの構成法を用いつつ, 且つ条件 (2.3.2) が満たされるようにするにはどうすればよいか, 筆者には今のところ不明である。予想 D の言わんとするところは 任意の自然数 ℓ に対して (2.3.2) の条件を満たしつつ, 且つこの位相モノドロミーを持つ退化族を構成できるかという点にある。

ここからは平面 4 次曲線族の性質を生かすことにする。この族の中で, 超楕円的ファイバーを捉えるには, 2 重 2 次曲線 (double conic) を考えれば良いことは古典的に知られたことである。その場合, 2 重 2 次曲線に沿って非正規な特異点を持たせそれを解消して族を作ると, その "特異点の悪さの具合"が Horikawa 指数を増大させる。これも今野一宏氏 [15] 及び堀川潁二氏自身 [12] には昔から先刻周知[8]のことであるが, この量こそ我々の言葉で $\mathrm{multi}_{[0]}\mu^*_{f'}\overline{\mathcal{D}}_{\mathrm{Hyper}}$ に直結する量である。正規化が完了して孤立特異点のみになった時, 今度はその孤立特異点の種類と配置が valency を確定するという仕掛けである。(2.3.1) の valency を与える種数 2 の方程式は, 浪川・上野両氏 [21] の論文では p.157 [VIII-4] に直線 $t = 0$ に沿う分岐曲線のそれとして記述されており, これを 2 次曲線上に "移植" すればよい。

以上のような考えを基に, $\mathbf{P}^2 \times$ 　の座標を $((X:Y:Z), t)$ としつつ, この上の特異曲面

$$(YZ - X^2)^2 = X^3 Y t^{2\ell-2} + G(X,Y,Z) t^{2\ell+7} + H(X,Y,Z) t^{2\ell-2+6K}$$

を考える。ここに $G(X,Y,Z)$ は点 $(0:1:0)$ で通常 3 重点を持つ斉次 4 次式であり, また $H(X,Y,Z)$ は一般の (generic) 斉次 4 次式である。([Figure 3] 参照) この特異点解消

[7]この方法は [2] §3 にも取り入れられた。

[8][12] は 1990 年当時に書かれた 20 ページ弱の論文で, [11] を種数 3 に拡張しようという意図のもとにそのほんのごく一部を書いたと感じられるが, 堀川氏が亡くなられた現在正確なところは不明である。あれは確か 1990 年 の冬のある日であったと思うが, 「女川原発が気になるので調べに行くが, 近くなのでついでにちょっと寄りたい」と告げられ, 東北大学の一室で今野氏と筆者をあわせた三人の個人セミナーを開いていただいた。我々二人にとってこのような堀川氏とのセミナーは人生最初でかつ最後のことでもあったが, その時の記憶もあわせて上の意図を推測しているのである。

モデルの持つ自然な退化族の原点上のファイバー芽が, 求める条件を満たすことが確かめられる。

一般に Horikawa 指数の定式化は, この不変量に要求される非負性が強い制約条件であり, 局所符号数よりもさらに精緻な考察が要求される。本節では Deligne-Mumford コンパクト化 $\overline{\mathcal{M}}_g$ 上の幾何を応用するための一つの方向性を示したが, ご覧のように予想ばかりが目につく現状である。もしこれに成功するなら, この立場のまま

(1) 偶数種数 Eisenbud-Harris 一般なファイバー芽の場合

(2) 中間の Cli ord 指数を持つファイバー芽の場合

(3) もっと一般の $\mathcal{A}$ ファイバーの場合

という風に進みたいが, 例えば (2) 以降は $\overline{\mathcal{M}}_g$ の Chow 群の性質に踏み込む必要があろう。

一方, もとの Harris-Mumford 一般の芽の局所符号数の定式化にもどっても, このままでは一種の "違和感" を拭えないままである。なぜなら「符号数因子からの寄与 + エータ不変量からの寄与」という定式化は, 2 種の見かけ上異なるものを足しあわせたものであり, 澄んだ目の数学者なら統一的に扱えないかと思うであろう[9]。例えば $\overline{\mathcal{M}}_g$ 上にあらかじめ何か "ある計量" を入れておき, この計量ごと誘導写像で引き戻してエータをとれば前者になるようにしておいて全体をエータ不変量で書き下す, などである。

こんなことができるものなのかどうか, 筆者には皆目わからない現状である。

参考文献

[1] T. Arakawa, T. Ashikaga, *Local splitting families of hyperelliptic pencils*, I: Tohoku Math. J. **53** (2001), 369–394. II: Nagoya Math. J. **175** (2004), 103–124.

[2] T. Ashikaga, *Local signature defect of fibered complex surfaces via monodromy and stable reduction*, to appear in Comment. Math. Helvetici.

[3] T. Ashikaga, ファイバー曲面の局所符号数とその応用 I, 「2009 年 Hodge 理論と代数幾何学」数理解析研究所講究録に掲載予定.

[4] T. Ashikaga, *Local signature of fibered complex surfaces via moduli and monodromy*, to appear in Demonstratio Math.

[5] T. Ashikaga, M. Ishizaka, *Classification of degenerations of curves of genus 3 via Matsumoto-Montesinos' theorem*, Tohoku Math. J. **53** (2001), 369–394.

[6] T. Ashikaga, K. Konno, *Global and local properties of pencils of algebraic curves*, in *Algebraic Geometry 2000 Azumino*, ed. by S. Usui et al., Adv. Studies in Pure Math. **36** (2002), 1–49.

[9]例えば筆者は 2009 年 8 月にストラスブールで開かれた研究集会でこれを発表したのだが, 講演後すぐ Lê Dũng Tráng 氏が近づいてきて, 筆者が心に感じていたこのことを指摘された。

[7] T. Ashikaga, K. Yoshikawa, *A divisor on the moduli space of curves associated to the signature of fibered surfaces*, (with Appendix written by K. Konno), Adv. Studies in Pure Math. **56** (2009), 1–34.

[8] D. Eisenbud, J. Harris, *The Kodaira dimension of the moduli space of curves of genus* ≥ 23, Invent. Math. **90** (1987), 359–387.

[9] J. Harris, D. Mumford, *On the Kodaira dimension of the moduli space of curves*, Invent. Math. **67** (1982), 23–86.

[10] J. Harris, I. Morrison, *Moduli of Curves*, Springer, Berlin, (1998).

[11] E. Horikawa, *On algebraic surfaces with pencils of curves of genus* 2, In *Complex Analysis and Algebraic Geometry*, Iwanami Shoten Publishers and Cambridge University Press, (1977), 79–90.

[12] E. Horikawa, *On certain pencils of curves of genus three*, Preprint (1990).

[13] M. Ishizaka, *Monodromies of hyperelliptic families of genus three curves*, Tohoku Math. J. **56** 1–26.

[14] M. Ishizaka, *Notes on periodic monodromies of degenerations of non-hyperelliptic curves of genus three*, Preprint.

[15] K. Konno, *Algebraic surfaces of general type with* $c_1^2 = 3p_g - 6$, Math. Ann. **290** (1991), 77–107.

[16] K. Konno, *Clifford index and the slope of fibered surfaces*, J. Algebr. Geom. **8** (1999), 207–220.

[17] K. Konno, *An appendix to the paper of Ashikaga and Yoshikawa*, Adv. Studies in Pure Math. **56** (2009), 35-37.

[18] Y. Kuno, *The mapping class group and the Meyer function for plane curves*, Math. Ann. **342** (2008), 923–949.

[19] Y. Kuno, *The Meyer functions for projective varieties and their application to local signatures for fibered 4-manifolds,* Preprint (2009).

[20] Y. Matsumoto, J. M. Montesinos-Amilibia, *Pseudo-periodic maps and degeneration of Riemann surfaces, I, II*, Preprints, Univ. of Tokyo and Univ. Complutense de Madrid, 1991/1994 (Revised in 2006)

[21] Y. Namikawa, K. Ueno, *The complete classification of fibers in pencils of genus two*, Manuscripta Math., **9** (1973), 143–186.

[22] M. Reid, *Problems on pencils of small genus*, Preprint (in his home page), (1990).

[23] T. Takahashi, *Algebraic surfaces with pencils of non-hyperelliptic curves of genus 4 and rank 4*, Preprint.

[24] S. Takamura, *Towards the classification of atoms of degenerations II, (Cyclic quotient construction of degenerations of complex curves)*, RIMS Preprint 1344 (2001).

[25] K. Yoshikawa, 符号数に附随するモジュライ空間の因子, 「Hodge 理論・退化・複素曲面の代数幾何とトポロジー」研究集会報告集, (2004), 115–139.